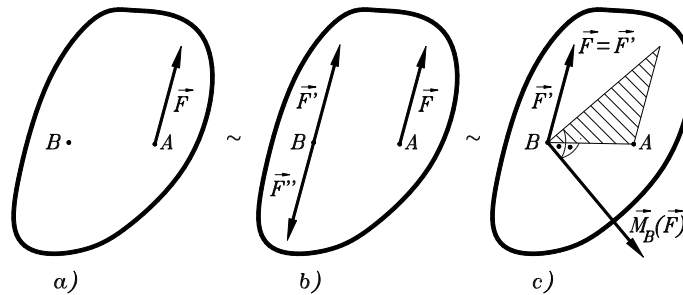


Osnovne teoreme Statike

Teorema o paralelnom prenošenju sile

Teorema: Dejstvo sile na telo neće se promeniti pri njenom paralelnom prenošenju u drugu tačku tela ako joj se doda jedan spreg sile čiji je moment jednak momentu sile koja se prenosi za tačku u koju se ta sila prenosi.



Dokaz: Posmatra se sila \vec{F} koja deluje u tački A tela. Neka je sa B označena tačka van napadne linije sile \vec{F} u koju treba preneti tu silu. U tom cilju se u tački B dodaje uravnotežen sistem sila (\vec{F}', \vec{F}'') , takav da je

$$\vec{F} = \vec{F}' = -\vec{F}'', \quad F = F' = F''$$

$$\vec{F} \sim (\vec{F}, \vec{F}', \vec{F}'')$$

$$\vec{F} \sim (\vec{F}', (\vec{F}, \vec{F}''))$$

Ako se moment sprega sila (\vec{F}, \vec{F}'') označi sa $\vec{M}_B(\vec{F})$, tj.

$$\vec{M}_B(\vec{F}) = \vec{M}(\vec{F}, \vec{F}'') = \vec{BA} \times \vec{F}$$

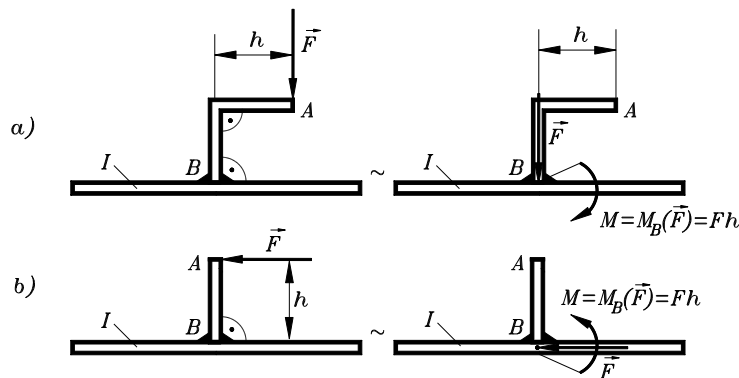
sledi

$$\vec{F} \sim (\vec{F}; \vec{M}_B(\vec{F})).$$

Ovaj postupak se u literaturi naziva redukcija sile na tačku. Tačka u koju se sila paralelno prenosi naziva se pol (centar) redukcije ili redukciona tačka.

a) Poprečna ekscentrična sila.

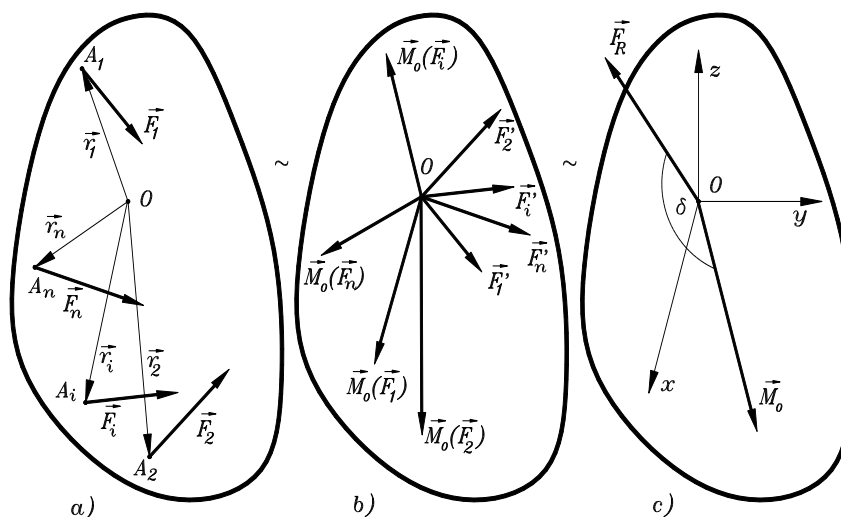
b) Podužna ekscentrična sila.



Osnovna teorema Statike

Teorema: Dejstvo proizvoljnog sistema sila na telo može se zameniti jednom silom, koja je jednaka glavnom vektoru sistema sila, čija napadna linija prolazi kroz proizvoljno izabranu redukcionu tačku tela i jednim spregom sila čiji je moment jednak glavnom momentu datog sistema sila u odnosu na istu redukcionu tačku.

Dokaz: Posmatra se proizvoljan prostorni sistem od n sila $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_i, \dots, \vec{F}_n)$ koji deluje u tačkama $A_1, A_2, \dots, A_i, \dots, A_n$ tela, čiji su položaji određeni vektorima položaja $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_i, \dots, \vec{r}_n$ u odnosu na proizvoljno izabrani centar redukcije O .



$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n) \sim (\vec{F}'_1, \vec{F}'_2, \dots, \vec{F}'_n; \vec{M}_o(\vec{F}_1), \vec{M}_o(\vec{F}_2), \dots, \vec{M}_o(\vec{F}_n))$$

$$\vec{F}_i = \vec{F}'_i, \quad F_i = F'_i$$

$$\vec{M}_o(\vec{F}_i) = \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

$$(\vec{F}'_1, \vec{F}'_2, \dots, \vec{F}'_n) \sim \vec{F}_R, \quad (\vec{M}_o(\vec{F}_1), \vec{M}_o(\vec{F}_2), \dots, \vec{M}_o(\vec{F}_n)) \sim \vec{M}_o$$

$$\vec{F}_R = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i, \quad \vec{M}_o = \sum_{i=1}^n \vec{M}_o(\vec{F}_i).$$

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n) \sim (\vec{F}_R; \vec{M}_o)$$

– glavni vektor datog sistema sila ne zavisi od izbora redukcionne tačke,

– glavni moment datog sistema sila zavisi od izbora redukcionne tačke.

Za razmatranja koja slede bitan je i ugao između vektora \vec{F}_R i \vec{M}_o .

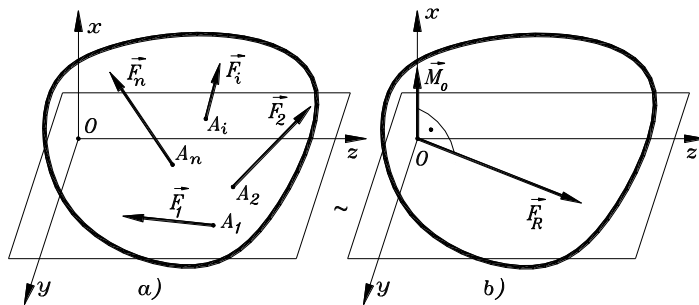
$$\vec{F}_R \cdot \vec{M}_o = F_R M_o \cos \delta$$

$$\vec{F}_R \cdot \vec{M}_o = X_R M_{ox} + Y_R M_{oy} + Z_R M_{oz}$$

$$\cos \delta = \frac{X_R}{F_R} \frac{M_{ox}}{M_o} + \frac{Y_R}{F_R} \frac{M_{oy}}{M_o} + \frac{Z_R}{F_R} \frac{M_{oz}}{M_o}$$

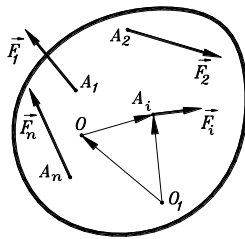
U slučaju kada na telo deluje proizvoljan ravan sistem sila, npr. u koordinatnoj ravni Oyz, moguće je formulisati specijalni oblik osnovne teoreme Statike koji se često primenjuje u konkretnim zadacima: *Dejstvo proizvoljnog ravnog sistema sila na telo može se zameniti jednom silom koja je jednaka glavnom vektoru datog sistema sila sa napadnom tačkom u redukcionoj tački tela, a napadnom linijom u ravni dejstva sila i jednim spregom sila čiji moment ima projekciju samo na osu koja prolazi kroz redukcionu tačku, a koja je upravna na ravan dejstva svih sila, pri čemu je ta projekcija jednaka projekciji glavnog momenta datog sistema sila na tu osu.*

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n) \sim (\vec{F}_R; M_{ox} \vec{i}).$$

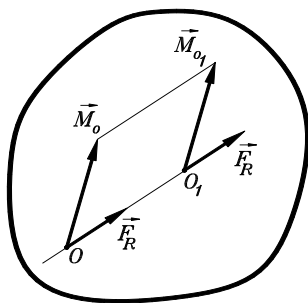


Svođenje sistema sila na prostiji oblik

Promena glavnog momenta pri promeni redukcionne tačke



$$\begin{aligned}\vec{M}_o &= \sum_{i=1}^n \vec{M}_o(\vec{F}_i) = \sum_{i=1}^n \overrightarrow{OA_i} \times \vec{F}_i \\ \vec{M}_{o_1} &= \sum_{i=1}^n \vec{M}_{o_1}(\vec{F}_i) = \sum_{i=1}^n \overrightarrow{O_1A_i} \times \vec{F}_i \\ \overrightarrow{O_1A_i} &= \overrightarrow{O_1O} + \overrightarrow{OA_i} \\ \vec{M}_{o_1} &= \sum_{i=1}^n \overrightarrow{O_1O} \times \vec{F}_i + \sum_{i=1}^n \overrightarrow{OA_i} \times \vec{F}_i\end{aligned}$$



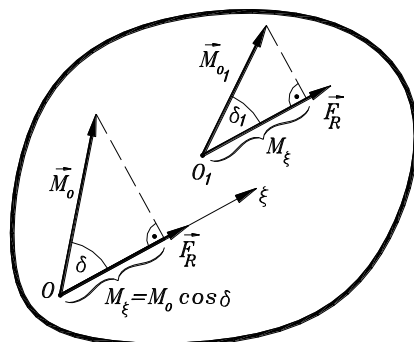
$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n \overrightarrow{O_1O} \times \vec{F}_i &= \overrightarrow{O_1O} \times \vec{F}_R \\ \vec{M}_{o_1} &= \vec{M}_o + \overrightarrow{O_1O} \times \vec{F}_R\end{aligned}$$

Može se zaključiti da se glavni moment neće menjati ako

je:

- $\sum_{i=1}^n \overrightarrow{O_1O} \times \vec{F}_i = 0$, tj. ako su vektori $\overrightarrow{O_1O}$ i \vec{F}_R kolinearni
- $\vec{F}_R = 0$.

Statičke invarijante



Skalarne, odnosno, vektorske veličine koje se ne menjaju pri promeni redukcionne tačke, nazivaju se statičke invarijante.

$$\vec{F}_R = \vec{F}_{R_1} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$$

Glavni vektor sistema sila koji deluje na telo je prva statička invarijanta.

$$\begin{aligned}\vec{M}_{o_1} \cdot \vec{F}_R &= (\overrightarrow{O_1O} \times \vec{F}_R) \cdot \vec{F}_R + \vec{M}_o \cdot \vec{F}_R \\ (\overrightarrow{O_1O} \times \vec{F}_R) \cdot \vec{F}_R &= 0 \\ \vec{M}_{o_1} \cdot \vec{F}_{R_1} &= \vec{M}_o \cdot \vec{F}_R\end{aligned}$$

$$M_{o_1} F_R \cos \delta_1 = M_o F_R \cos \delta$$

Kako je $\vec{F}_R = \vec{F}_{R_1} \neq 0$, sledi da je

$$M_{o_1} \cos \delta_1 = M_o \cos \delta = M_\xi = \text{const.}$$

Projekcija glavnog momenta na pravac glavnog vektora ne zavisi od izbora redukcionе tačke.

Svođenje sistema sila na prostiji oblik

$$I) \vec{F}_R \cdot \vec{M}_o = F_R M_o \cos \delta = 0$$

$$a) \vec{F}_R = 0; \quad \vec{M}_o = 0$$

i tada je proizvoljan sistem sila uravnotežen.

$$b) \vec{F}_R = 0; \quad \vec{M}_o \neq 0$$

i tada se sistem sila svodi na spreg sila.

$$c) \vec{F}_R \neq 0; \quad \vec{M}_o = 0 \text{ ili } \vec{F}_R \neq 0; \quad \vec{M}_o \neq 0; \quad \cos \delta = 0$$

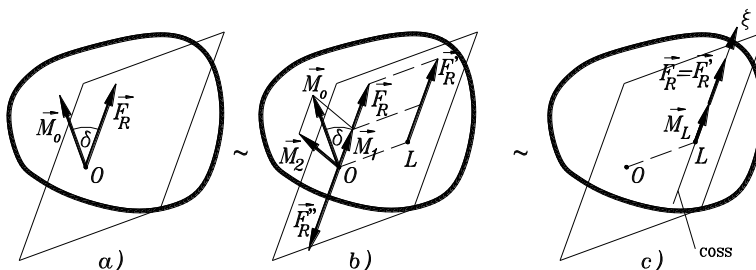
posmatrani sistem sila svodi se na rezultantu.

$$II) \vec{F}_R \cdot \vec{M}_o = F_R M_o \cos \delta \neq 0$$

$$\vec{F}_R \neq 0; \quad \vec{M}_o \neq 0; \quad \cos \delta \neq 0$$

tada se sistem sila svodi na dinamu ili na krst sila.

Svođenje prostornog sistema sila na dinam



$$\vec{M}_o = \vec{M}_1 + \vec{M}_2$$

$$(\vec{F}_R; \vec{M}_o) \sim (\vec{F}_R; \vec{M}_1, \vec{M}_2)$$

$$F_R = F_R' = F_R''$$

$$(\vec{F}_R; \vec{M}_o) \sim (\vec{F}_R; \vec{M}_1; \vec{F}_R', \vec{F}_R'')$$

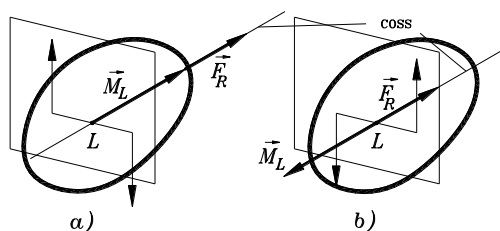
$$\vec{F}_R = \vec{F}_R' = -\vec{F}_R'' \quad \overline{OL} = \frac{M_2}{F_R}$$

$$(\vec{F}_R, \vec{F}_R'') \sim 0$$

$$(\vec{F}_R; \vec{M}_o) \sim (\vec{F}_R; \vec{M}_1)$$

$$M_{L\xi} = M_o \cos \delta$$

$$(\vec{F}_R; \vec{M}_o) \sim (\vec{F}_R; \vec{M}_L)$$



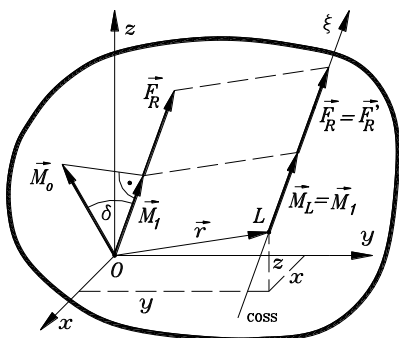
U tom slučaju kaže se da je sistem sila sveden na dinamu $(\vec{F}_R; \vec{M}_L)$, pri čemu se ta dva kolinearna vektora nalaze na osi udaljenoj u odnosu na tačku O za rastojanje

$$\overline{OL} = \frac{M_o \sin \delta}{F_R}$$

Ova osa naziva se centralna osa sistema sila (coss).

Zavisno od toga da li su kolinearni vektori \vec{F}_R i \vec{M}_L istog ili suprotnih smerova, razlikuju se desna i leva dinamika.

Jednačina centralne ose sistema sila.



$$\vec{M}_L = \vec{M}_O + \vec{LO} \times \vec{F}_R$$

$$\vec{M}_L = p\vec{F}_R$$

gde je p - parametar diname

$$p = \frac{M_{L\xi}}{F_R}$$

$$p\vec{F}_R = \vec{M}_O - \overrightarrow{OL} \times \vec{F}_R$$

$$\vec{F}_R = X_R \vec{i} + Y_R \vec{j} + Z_R \vec{k},$$

$$\vec{M}_o = M_x \vec{i} + M_y \vec{j} + M_z \vec{k}$$

$$\overrightarrow{OL} = \vec{r}_L = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$p(X_R \vec{i} + Y_R \vec{j} + Z_R \vec{k}) = M_x \vec{i} + M_y \vec{j} + M_z \vec{k} - (yZ_R - zY_R) \vec{i} - (zX_R - xZ_R) \vec{j} - (xY_R - yX_R) \vec{k}$$

$$pX_R = M_x - (yZ_R - zY_R)$$

$$pY_R = M_y - (zX_R - xZ_R)$$

$$pZ_R = M_r - (xY_R - yX_R).$$

Jednačina centralne ose sistema sila

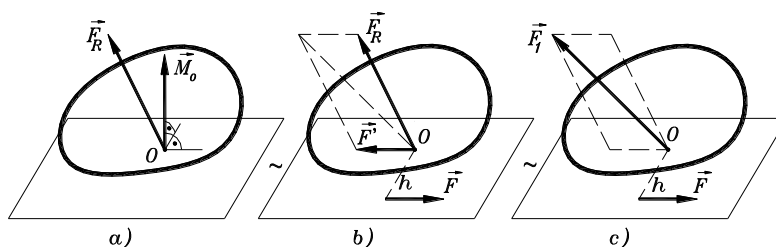
$$\frac{M_x - (yZ_R - zY_R)}{X_R} = \frac{M_y - (zX_R - xZ_R)}{Y_R} = \frac{M_z - (xY_R - yX_R)}{Z_R} = \frac{M}{F_R L_{\Sigma}^2}$$

pri čemu M_{L^E} predstavlja drugu statičku invarijantu.

Jednačina napadne linije rezultante

$$\frac{M_x - (yZ_R - zY_R)}{X_R} = \frac{M_y - (zX_R - xZ_R)}{Y_R} = \frac{M_z - (xY_R - yX_R)}{Z_R} = 0,$$

7.3.5. Svodenje prostornog sistema sila na krst sila



Kada su glavni vektor \vec{F}_R i glavni moment \vec{M}_o datog sistema sila različiti od nule i ako ugao između njih nije 90° , tada se posmatrani sistem sila, umesto na dinam, može svesti i na krst sila

$$(\vec{F}_R; \vec{M}_\rho) \sim (\vec{F}_R, \vec{F}, \vec{F}')$$

$$h = \frac{M_o}{F}$$

$$\vec{F}_R + \vec{F}' = \vec{F}_l$$

$$(\vec{F}_R; \vec{M}_o) \sim (\vec{F}_l, \vec{F})$$

pri čemu sile \vec{F}_1 i \vec{F}_2 ne pripadaju istoj ravni. Ovakav sistem sila (\vec{F}_1, \vec{F}_2) naziva se krst sila.

Postavlja se pitanje kada će krst sila biti ekvivalentan nuli, tj. kada će važiti

$$(\vec{F}_1, \vec{F}) \sim 0$$

Na osnovu prve aksiome, prethodni uslov biće ispunjen ako:

a) sile \vec{F}_1 i \vec{F} zadovoljavaju jednakost

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}$$

b) sile imaju zajedničku napadnu liniju.

Uslov a):

$$\vec{F}_R + \vec{F}' + \vec{F} = 0$$

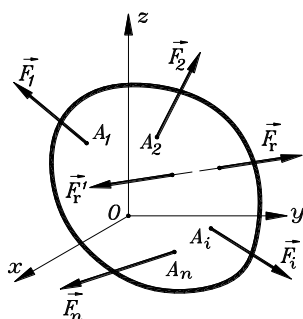
što se, s obzirom na činjenicu da za sile sprega važi $\vec{F}' = -\vec{F}$, $\vec{F}_R = 0$.

Uslov b): Sile \vec{F}_1 i \vec{F} imaju zajedničku napadnu liniju ako sila \vec{F} prolazi kroz redukcionu tačku O . To znači da je tada $h = 0$, što odgovara uslovu $\vec{M}_O = 0$.

Ova razmatranja treba kompletirati pokazivanjem da su uslovi $\vec{F}_R = 0$ i $\vec{M}_O = 0$ dovoljni za ravnotežu posmatranog sistema sila. Polazeći od toga da su ispunjeni ovi uslovi treba pokazati da je tada posmatrani sistem uravnotežen. Kako je u ovom slučaju ispunjeno $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n) \sim (\vec{F}_R; \vec{M}_O)$, neposredno sledi da važi

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n) \sim 0.$$

Varinjonova teorema o momentu rezultante proizvoljnog prostornog sistema sila



Teorema: Moment rezultante prostornog sistema sila za proizvoljnu tačku jednak je vektorskom zbiru momenata svih sila za tu istu tačku.

Dokaz: $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n) \sim \vec{F}_r$

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n, \vec{F}_r^l) \sim 0$$

$$\sum_{i=1}^n \vec{M}_O(\vec{F}_i) + \vec{M}_O(\vec{F}_r^l) = 0$$

$$\vec{M}_O(\vec{F}_r^l) = -\vec{M}_O(\vec{F}_r)$$

$$\vec{M}_O(\vec{F}_r) = \sum_{i=1}^n \vec{M}_O(\vec{F}_i)$$

Specijalni slučaj Varinjonove teoreme

$$M_{ox}(\vec{F}_r) = \sum_{i=1}^n M_{ox}(\vec{F}_i)$$

Moment rezultante prostornog sistema sila, za neku osu, jednak je zbiru projekcija momenata svih sila za tu osu.

Teorema: Moment rezultante prostornog sistema sila za proizvoljnu tačku jednak je glavnom momentu tog sistema sila za istu momentnu tačku.

Korišćenjem prethodno formulisane teoreme može se dokazati da spreg sila nema rezultantu. Glavni moment sprega sila $(\sum_{i=1}^n \vec{M}_O(\vec{F}_i))$ različit je od nule i ne zavisi od izbora redukcionog tačke. Ako se pretpostavi da spreg sila ima rezultantu, tada je

$$\vec{M}_O(\vec{F}_r) = \sum_{i=1}^n \vec{M}_O(\vec{F}_i)$$

S obzirom da prethodna teorema važi za proizvoljno izabranu momentnu tačku, može se uzeti da se tačka O nalazi na napadnoj liniji rezultante. U tom slučaju leva strana prethodnog izraza jednaka je nuli dok je njegova desna strana različita od nule. Ova kontradiktornost je posledica pogrešne pretpostavke o postojanju rezultante sprega sila. Dakle, spreg sila nema rezultantu.